ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

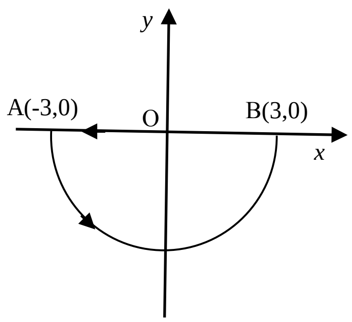
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z) = \overline{z}^2 + i2z\overline{z}$ και

$f_2(z) = \dfrac{z\cosh z}{\sinh z - i\cosh z} + \mathrm{Log}(z-i)$ όπου $z = x + iy$.

α) Δώστε τον ορισμό της γειτονιάς ενός σημείου z_0 στο μιγαδικό επίπεδο. Γράψτε ικανές συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(z)$ να έχει παράγωγο στο σημείο z_0. Πότε μια συνάρτηση $f(z)$ λέγεται αναλυτική στο σημείο z_0;

β) Προσδιορίστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις $f_1(z)$, $f_2(z)$ έχουν παράγωγο και τα σημεία που είναι αναλυτικές. (Η απάντησή σας πρέπει να είναι αιτιολογημένη και να στηρίζεται στην διδαχθείσα θεωρία).



γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \oint_C f_1(z)dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z)dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος βρόχος ΟΑΒΟ του σχήματος που αποτελείται από την ημιπεριφέρεια κύκλου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ με κέντρο την αρχή Ο και ακτίνα 3 και τη διάμετρο ΑΒ.

ΘΕΜΑ 2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(z) = \frac{z}{z-i} \quad \text{και} \quad f_2(z) = \frac{z}{z-i}e^{\frac{1}{z}}.$$

α) Εξηγείστε γιατί το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z (δηλ. με κέντρο το $z_0 = 0$) στο χωρίο $|z| > 1$ είναι σειρά Laurent. Υπολογίστε τη σειρά Laurent της $f_1(z)$ στο χωρίο $|z| > 1$.

β) Ποια είναι τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $f_2(z)$ και ποια από αυτά είναι πόλοι; Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C f_2(z)dz$ όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|2z-1|=1$.

γ) Πότε μια πραγματική συνάρτηση $u(x,y)$ λέγεται αρμονική σε ένα χωρίο του καρτεσιανού επιπέδου *x,y*; Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x,y)=x^2-y^2+x-y+1$ είναι αρμονική παντού και μετά προσδιορίστε την αρμονική συζυγή της.

ΘΕΜΑ 3. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (με επεξήγηση της μεθόδου υπολογισμού σε κάθε περίπτωση και αιτιολόγηση των υπολογιστικών σας βημάτων) τα ολοκληρώματα

$$\alpha)\quad \mathrm{I}_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx\,,\qquad \beta)\quad \mathrm{I}_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(\pi x)}{x^2-2x+2}dx\,.$$

ΘΕΜΑ 4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2H(x)-H(x+1)-H(x-1)$ όπου $H(x)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

α) Διαπιστώστε ότι η $f(x)$ είναι διάφορη του μηδενός μόνο στο διάστημα $(-1,1)$ και μετά σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Υπολογίστε τη μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)$. Στη συνέχεια βασιζόμενοι στον τύπο Parseval-Plancherel βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 k}{k^2}dk$$

β) Εφαρμόστε την μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε (αιτιολογώντας κάθε υπολογιστικό σας βήμα) την διαφορική εξίσωση του Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$ στο άνω ημιεπίπεδο *x,y* ($-\infty<x<+\infty\;,\;0\le y<+\infty$) αν η συνάρτηση $u(x,y)$ ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη: $u(x,0)=f(x)$ και $\lim_{y\to+\infty}u(x,y)\neq\infty$. (Από φυσική άποψη η $u(x,y)$ θα μπορούσε να περιγράφει τη θερμοκρασία μιας πολύ λεπτής ημιάπειρης θερμικά αγώγιμης πλάκας της οποίας η επιφάνεια συμπίπτει με το άνω ημιεπίπεδο *x,y*).