# ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014

# ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

## ΘΕΜΑ 1.

α) Δείτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού».

β) Η συνάρτηση $f_1(z)$ γράφεται

$$f_1(z) = (x - iy)^2 + i2(x^2 + y^2) = x^2 - y^2 + i2(x^2 + y^2 - xy).$$

Το πραγματικό και φανταστικό της μέρος είναι $u(x, y) = x^2 - y^2$ και $v(x, y) = 2(x^2 + y^2 - xy)$. Οι πρώτες μερικές παράγωγοι των $u(x, y)$ και $v(x, y)$

$u_x = 2x$, $u_y = -2y$, $v_x = 4x - 2y$, $v_y = 4y - 2x$,

είναι προφανώς συνεχείς σε όλο το επίπεδο *x,y*. Επομένως, η $f_1(z)$ θα έχει παράγωγο στα σημεία που ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann. Αυτές μας δίνουν

$$\begin{cases} u_x = v_y \;\Rightarrow\; x = y \\ u_y = -v_x \;\Rightarrow\; x = y \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε ότι η $f_1(z)$ έχει παράγωγο μόνο στα σημεία της ευθείας $y = x$ ή $z = (1+i)x$. Δεν είναι όμως αναλυτική σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου ούτε καν στα σημεία της ευθείας $y = x$ αφού όποιο σημείο της ευθείας κι' αν θεωρήσουμε δεν υπάρχει γειτονιά του που σε όλα τα σημεία της η $f_1(z)$ να έχει παράγωγο.

Η $f_2(z)$ είναι αναλυτική παντού εκτός από τα σημεία στα οποία δεν είναι αναλυτική η $\mathrm{Log}(z-i)$ και τα σημεία που είναι ρίζες της εξίσωσης $\sinh z - i\cosh z = 0$ ή $\tanh z = i$. Η $\mathrm{Log}(z-i)$ δεν είναι αναλυτική στα σημεία για τα οποία $\mathrm{Im}(z-i) = 0$ και $\mathrm{Re}(z-i) \le 0$. Αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία $z = x + i$ με $x \le 0$. Για τις ρίζες της $\sinh z - i\cosh z = 0$ (που είναι απλές ρίζες) έχουμε:

$$\sinh z - i\cosh z = 0 \Leftrightarrow e^{z} - e^{-z} = i(e^{z} + e^{-z}) \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{1+i}{1-i} = i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2z = \log i = i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow z = i\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right).$$

Άρα συνοψίζοντας, η $f_2(z)$ δεν είναι αναλυτική στα σημεία $z_k = i(k+1/4)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ (που είναι απλοί πόλοι) και στα σημεία της ημιευθείας $z = x+i$ με $x \le 0$ που αποτελεί την εγκοπή κλάδου για την συνάρτηση $\mathrm{Log}(z-i)$.

- Σημειώστε ότι εναλλακτικά οι ρίζες της $\sinh z - i\cosh z = 0$ μπορούν να βρεθούν και μέσω των ταυτοτήτων $\cosh z = \cos(iz)$, $\sinh z = -i\sin(iz)$, δηλαδή

$$\sinh z - i\cosh z = 0 \Leftrightarrow -i\sin(iz) - i\cos(iz) = 0 \Leftrightarrow \tan(-iz) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -iz = k\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z = i\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

γ) <u>Υπολογισμός του</u> $\oint_C f_1(z)dz$:

Ο βρόχος $C$ αποτελείται από το κυκλικό τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ επί του πραγματικού άξονα. Οι παραμετρικές τους εξισώσεις είναι:

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$: $z(\theta) = 3e^{i\theta}$ με $-\pi \le \theta \le 0$. Ενώ $f_1(z) = 9e^{-2i\theta} + 18i$ και $z'(\theta) = 3ie^{i\theta}$.

ΒΑ: $z(x) = x$ με $-3 \le x \le 3$. Ενώ $f_1(z) = (1+2i)x^2$ και $z'(x) = 1$.

Άρα

$$\oint_C f_1(z)dz = \int_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} f_1(z)dz + \int_{\mathrm{BA}} f_1(z)dz = \int_{-\pi}^{0} \left(9e^{-2i\theta} + 18i\right)3ie^{i\theta}d\theta + \int_{3}^{-3} (1+2i)x^2 dx =$$
$$= (-27e^{-i\theta} + 27\cdot 2ie^{i\theta})\Big\|_{-\pi}^{0} + (1+2i)\frac{x^3}{3}\Big\|_{3}^{-3} = 54(-1+2i) - 18(1+2i) = 72(-1+\mathrm{i}).$$

<u>Υπολογισμός του</u> $\oint_C f_2(z)dz$:

Από τα σημεία που η $f_2(z)$ δεν είναι αναλυτική μόνο το $z_1 = i(-1+1/4)\pi = -i3\pi/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου *C*.

Επειδή η $\mathrm{Log}(z-i)$ είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του βρόχου $C$ δυνάμει του θεωρήματος Cauchy-Goursat έχουμε

$$\oint_C \mathrm{Log}(z-i)dz = 0 .$$

Τώρα με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα έχουμε

$$\oint_C f_2(z)dz = \oint_C \frac{z\cosh z}{\sinh z - i\cosh z}dz + \oint_C \mathrm{Log}(z-i)dz =$$

$$= \oint_C \frac{z\cosh z}{\sinh z - i\cosh z}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z\cosh z}{\sinh z - i\cosh z}$$

Όμως

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z\cosh z}{\sinh z - i\cosh z} = \left.\frac{z\cosh z}{(\sinh z - i\cosh z)'}\right\|_{z=z_1} = \left.\frac{z\cosh z}{\cosh z - i\sinh z}\right\|_{z=z_1}$$

Και επειδή $\cosh z_1 = \cosh(i3\pi/4) = \cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ και $\sinh z_1 = -\sinh(i3\pi/4) = -i\sin(3\pi/4) = -i/\sqrt{2}$ , θα έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z\cosh z}{\sinh z - i\cosh z} = -\frac{3\pi}{8}(1+i) .$$

Τελικά

$$\oint_C f_2(z)dz = 2\pi i\left[-\frac{3\pi}{8}(1+i)\right] = \frac{3}{4}\pi^2(1-i) .$$

**ΘΕΜΑ 2.**

α) Το χωρίο $|z|>1$ είναι ένα δακτυλιοειδές χωρίο που στον εσωτερικό του κυκλικό δίσκο $|z|\le 1$ υπάρχει ένα ανώμαλο σημείο της $f_1(z)$, το $z=i$ . Επομένως το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z σε αυτό το χωρίο δεν μπορεί να είναι ένα ανάπτυγμα Taylor αλλά θα είναι ένα ανάπτυγμα Laurent.

Στο χωρίο $|z|>1$ όπου $|i/z|<1$ θα έχουμε

$$f_1(z)=\frac{z}{z-i}=\frac{1}{1-\frac{i}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^n}.$$

Αν χωρίσουμε τις άρτιες από τις περιττές δυνάμεις του z η σειρά Laurent μπορεί να γραφεί και στην μορφή

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}\;.$$

β) Τα ανώμαλα σημεία της $f_2(z)$ είναι τα $z=i$ και $z=0$. Το $z=i$ είναι απλός πόλος ενώ το $z=0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο. Από αυτά το $z=0$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου *C* ενώ το $z=i$ βρίσκεται στο εξωτερικό του. Επομένως εφαρμόζοντας το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε

$$\oint_C f_2(z)dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z).$$

Επειδή το $z=0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο για τον υπολογισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε το ανάπτυγμα της $f_2(z)$ σε σειρά Laurent στο χωρίο $0<|z|<1$. Σε αυτό το χωρίο μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{z}{z-i}=-\frac{1}{i}\frac{z}{1-\frac{z}{i}}=iz\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{i^n}\;,$$

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

Επομένως,

$$f_2(z)=iz\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{i^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!z^m}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^{1+n-m}}{i^{n-1}m!}$$

Ο συντελεστής του όρου ως προς $1/z$ σε αυτή τη σειρά Laurent είναι το ζητούμενο ολοκληρωτικό υπόλοιπο. Τον λαμβάνουμε θέτοντας $m = n + 2$ στο ανωτέρω διπλό άθροισμα. Δηλαδή

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{i^{n-1}(n+2)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{i^{n-3} n!} = -i \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{i^n n!} =$$
$$= -i\left( -1 - \frac{1}{i} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{i^n n!} \right) = -i\left( -1 + i + e^{\frac{1}{i}} \right) = -i\left( -1 + i + e^{-i} \right) =$$
$$= -i\left[ -1 + \cos 1 + i\left(1 - \sin 1\right) \right]$$

Τελικά

$$\oint_C f_2(z)dz = 2\pi(-1 + \cos 1) + i2\pi(1 - \sin 1).$$

γ) Η συνάρτηση $u(x, y)$ λέγεται αρμονική στο χωρίο $D$ του καρτεσιανού επιπέδου $x$,$y$ αν στο $D$ ισχύουν οι παρακάτω δύο απαιτήσεις:

1. Οι δεύτερες μερικές της παράγωγοι $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{yy}$ είναι συνεχείς.
2. Ικανοποιείται η εξίσωση του Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Είναι προφανές ότι και οι δύο αυτές απαιτήσεις ικανοποιούνται σε όλο το καρτεσιανό επίπεδο από την $u(x, y)$ αφού $u_{xx} = 2,\ u_{xy} = u_{yx} = 0,\ u_{yy} = -2$.

Η ζητούμενη αρμονική συζυγής $v(x, y)$ της $u(x, y)$ πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann $v_y = u_x$ και $v_x = -u_y$. Η πρώτη εξίσωση γράφεται

$$v_y = 2x + 1 \Rightarrow v = 2xy + y + c(x).$$

Εισάγουμε αυτή την τιμή της $v(x, y)$ στη δεύτερη εξίσωση και παίρνουμε

$$2y + c_x = 2y + 1 \Rightarrow c_x = 1 \Rightarrow c(x) = x + \text{σταθερά}.$$

Έτσι, η ζητούμενη αρμονική συζυγής της $u(x, y)$ γράφεται

$$v(x, y) = 2xy + x + y + c,$$

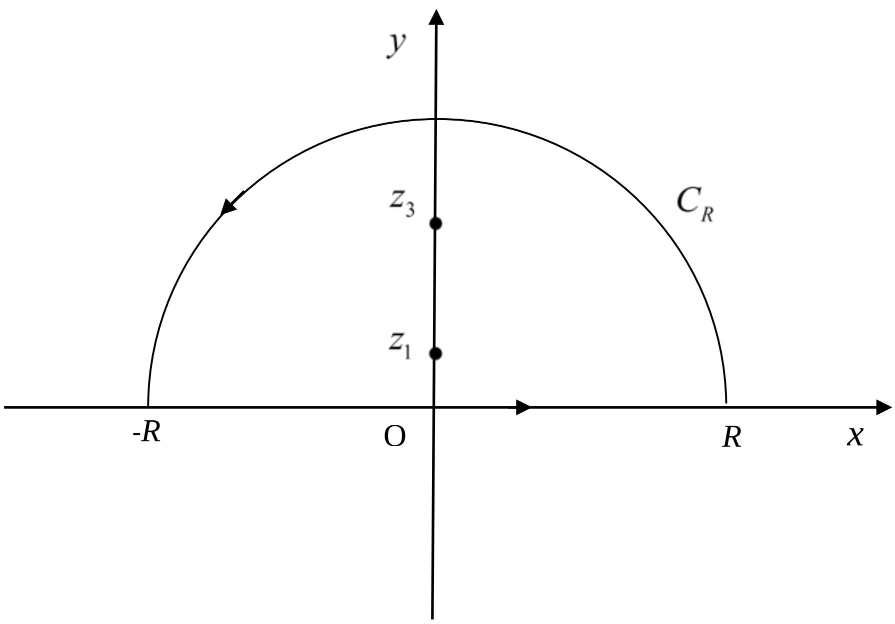
όπου $c$ πραγματική σταθερά. Επειδή οι $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι αρμονικές σε όλο το καρτεσιανό $x$,$y$ επίπεδο η συνάρτηση $f(z)=u+iv$ θα είναι ακεραία αναλυτική. Ο συντομότερος τρόπος για να την προσδιορίσουμε είναι στην έκφραση για τις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ να θέσουμε $y=0$ και στη θέση του $x$ το $z$. Βρίσκουμε έτσι ότι $f(z)=z^2+(1+i)z+1+ic$.

**ΘΕΜΑ 3.**

α) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο $C$ του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο $C_R$ κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των $x$. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες του παρονομαστή. Αυτές είναι οι $z_1=i$, $z_2=-i$, $z_3=3i$, $z_4=-3i$ και είναι απλοί πόλοι.




Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο $C$ και την συνάρτηση $f(z)$ μας δίνει

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z)\right)$$

Αφήνουμε την ακτίνα $R$ να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z)\right) \quad (3.1)$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στα σημεία $z_1$ και $z_2$ γράφεται

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{\dfrac{z^2}{(z^2+9)(z+i)}}{z-i} = \frac{z^2}{(z^2+9)(z+i)}\Bigg\|_{z=i} = \frac{-1}{8\cdot 2i} = \frac{i}{16}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z+3i)}}{z-3i} = \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3i)}\Bigg\|_{z=3i} = \frac{-9}{(-8)\cdot 6i} = -\frac{3i}{16}$$

Αντικαθιστούμε τις ποιο πάνω τιμές στη σχέση (3.1) που γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{4}. \qquad (3.2)$$

Τώρα θα δείξουμε με την βοήθεια της ανισότητας Darboux ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Γι’ αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα για τα σημεία z πάνω στον δρόμο $C_R$ (όπου $|z| = R$) για να πάρουμε:

$$\left|(z^2+1)(z^2+9)\right| = \left|z^2+1\right|\left|z^2+9\right| \geq \left|\left|z\right|^2-1\right|\left|\left|z\right|^2-9\right|^3 = (R^2-1)(R^2-9)$$

οπότε

$$|f(z)| \leq \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-9)} \; .$$

Τώρα η ανισότητα Darboux γράφεται

$$0 \le \left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \le \pi R \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-9)} \quad .$$

Στο όριο που $R \to +\infty$ επειδή $\lim_{R\to\infty} R^3 \big/ (R^2-1)(R^2-9) = 0$ από την ανισότητα Darboux έπεται ότι

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R} f(z)dz \right| = \left| \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz \right| = 0 \, ,$$

και έτσι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0 \quad ,$$

και η (3.2) γράφεται

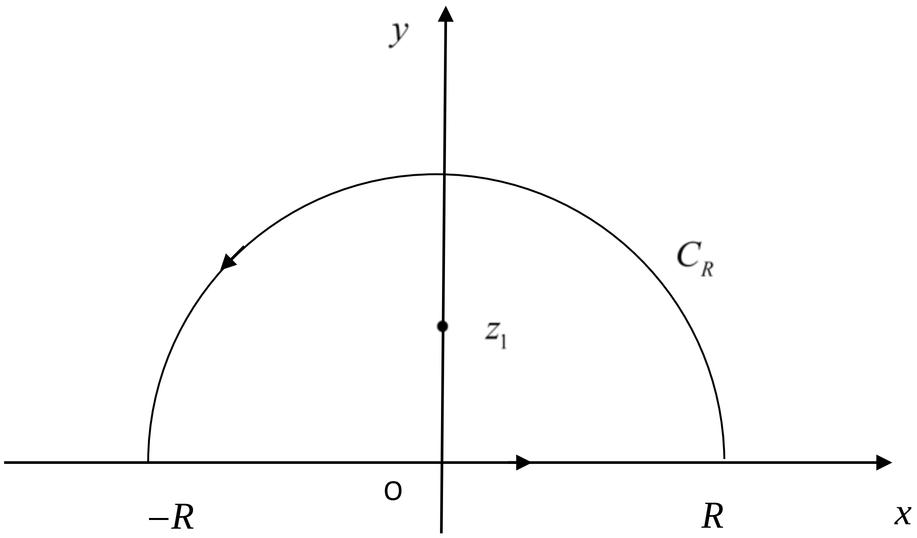
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2-9)} dx = \frac{\pi}{4} \quad .$$

β)

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(z) = f(z)e^{iz} \, , \text{ όπου } \quad f(z) = \frac{z}{z^2-2z+2}$$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο $C$ του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο $C_R$ κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των $x$. Η συνάρτηση $g(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της εξίσωσης $z^2-2z+2=0$. Οι ρίζες αυτές είναι οι $z_1 = 1+i$ και $z_2 = 1-i$. Παρατηρούμε ότι από αυτές μόνο η $z_1$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο ( $y>0$ ) ενώ καμία δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα των $x$.




Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο $C$ και την συνάρτηση $g(z)$ μας δίνει

$$\oint_C g(z)dz = \int_{C_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z)$$

Αφήνουμε την ακτίνα $R$ να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) \qquad (3.3)$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο $z_1$ (που είναι απλός πόλος της $g(z)$) είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) = \frac{ze^{i\pi z}}{(z^2-2z+2)'}\Bigg\|_{z=1+i} = \frac{ze^{i\pi z}}{2z-2}\Bigg\|_{z=1+i} = \frac{-(1+i)e^{-\pi}}{2i} = \frac{1}{2}(i-1)e^{-\pi} \ .$$

Αντικαθιστούμε την ποιο πάνω τιμή στη σχέση (3.3) που γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i\frac{1}{2}(i-1)e^{-\pi} = -(1+i)\pi e^{-\pi} . \qquad (3.4)$$

Τώρα θα δείξουμε με την βοήθεια του λήμματος Jordan (βλέπε σημειώσεις Μιγαδ. Λογ. σελ. 96) ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz = 0$. Γι' αυτό το σκοπό παρατηρούμε ότι πάνω στον δρόμο $C_R$ (όπου $|z| = R$) ισχύει η ανισότητα:

$$\left|z^2 - 2z + 2\right| = |z - z_1||z - z_2| \geq \left||z| - |z_1|\right|\left||z| - |z_2|\right| = (R - \sqrt{2})^2$$

Άρα πάνω στον $C_R$ η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$|f(z)| \leq M_R \equiv \frac{R}{(R - \sqrt{2})^2},$$

Τώρα επειδή $\lim\limits_{R \to +\infty} M_R = 0$ από το λήμμα Jordan έπεται ότι

$\lim\limits_{R \to \infty} \int_{C_R} g(z)dz = 0$ και έτσι η σχέση (3.2) γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 2} e^{i\pi x} = -(1+i)\pi e^{-\pi}.$$

Από αυτήν παίρνοντας τα φανταστικά μέρη και των δύο μελών προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 - 2x + 2} dx = -\pi e^{-\pi}.$$

**ΘΕΜΑ 4.**

α) Παρατηρούμε τα εξής:

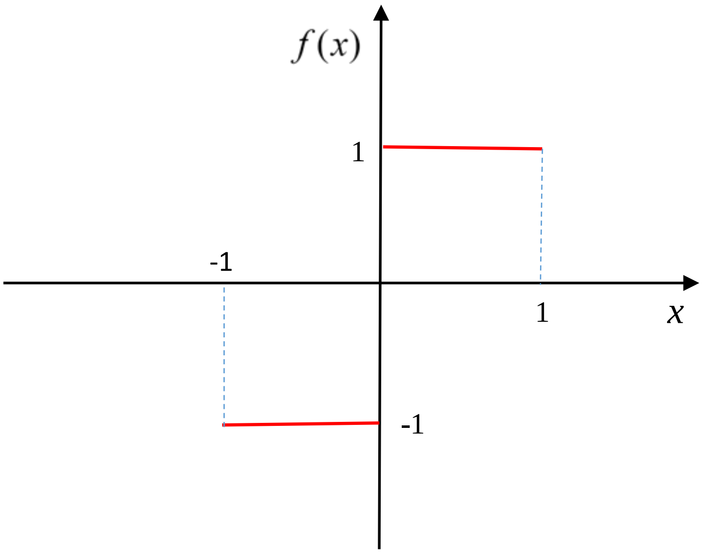
Αν $x < -1$ τότε $H(x+1) = H(x) = H(x-1) = 0$ οπότε $f(x) = 0$.

Αν $-1 < x < 0$ τότε $H(x+1) = 1$, $H(x) = H(x-1) = 0$ οπότε $f(x) = -1$.

Αν $0 < x < 1$ τότε $H(x+1) = H(x) = 1$, $H(x-1) = 0$ οπότε $f(x) = 1$.

Αν $x > 1$ τότε $H(x) = H(x+1) = H(x-1) = 1$ οπότε $f(x) = 0$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει την ακόλουθη μορφή:




Η μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)$ γράφεται:

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^{0}(-1)e^{-ikx}dx+\int_{0}^{1}e^{-ikx}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{ik}e^{-ikx}\Big\|_{-1}^{0}-\frac{1}{ik}e^{-ikx}\Big\|_{0}^{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}\left(2-e^{ik}-e^{-ik}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2i}{k}\left(1-\cos k\right)=-2i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^2\left(\frac{k}{2}\right)}{k}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο Parseval-Plancherel $\|f(x)\|^2=\|F(k)\|^2$ για την $f(x)$:

$$\|F(k)\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|F(k)|^2\,dk=\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4\left(\frac{k}{2}\right)}{k^2}dk\,.$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή ολοκλήρωσης θέτοντας $k\to 2k$ το ανωτέρω ολοκλήρωμα γράφεται

$$\|F(k)\|^2=\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 k}{k^2}dk\,.$$

Από την άλλη μεριά

$$\| f(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 .$$

Έτσι ο τύπος Parseval-Plancherel μας δίνει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 k}{k^2} dk = \frac{\pi}{2}$$

και επειδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4 k}{k^2} dk = \frac{\pi}{4} \; .$$

β) Η λύση της εξίσωσης του Laplace στο άνω ημιεπίπεδο με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier είναι αναπτυγμένη διεξοδικά στις σημειώσεις του μαθήματος όπου και σας παραπέμπω. Η μέθοδος επίλυσης μας οδηγεί τελικά στον ολοκληρωτικό τύπο του Schwarz που εδώ γράφεται

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt = \frac{1}{\pi} \left( -\int_{-1}^{0} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt + \int_{0}^{1} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \right).$$

Αλλάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης θέτοντας $\xi = t/y$ και παίρνουμε

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \left( \int_{(x+1)/y}^{x/y} \frac{d\xi}{1+\xi^2} - \int_{x/y}^{(x-1)/y} \frac{d\xi}{1+\xi^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \arctan \xi \Big\|_{(x+1)/y}^{x/y} - \arctan \xi \Big\|_{x/y}^{(x-1)/y} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) \right].$$

Σημειώστε ότι με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\arctan\alpha \pm \arctan\beta = \arctan\left(\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}\right) \; ,$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η ανωτέρω συνάρτηση γράφεται και στη μορφή

$$u(x, y) = \arctan\left( \frac{2xy}{(x^2 + y^2) + y^2 - x^2} \right).$$