

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

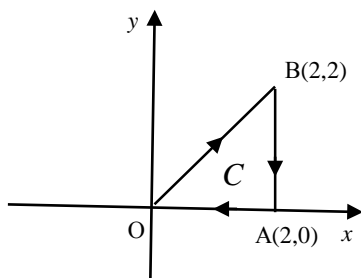
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ 1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f_1(z) = x(x^2 + y^2 - 2) + iy(-x^2 - y^2 + 2) \quad \text{και} \quad f_2(z) = \frac{8z}{z^4 - i} + \frac{\sqrt{2} \cos z}{\sqrt{2} - \sin z} \quad \text{όπου } z = x + iy$$

α) Γράψτε ικανές συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(z)$ να έχει στο σημείο z_0 παράγωγο. Γράψτε την εκφώνηση του θεωρήματος Cauchy-Goursat.

β) Προσδιορίστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις $f_1(z)$, $f_2(z)$ έχουν παράγωγο και τα σημεία στα οποία είναι αναλυτικές. Ποια είναι η τιμή της $f_1'(z)$ στο σημείο $z = i$; (Η απάντησή σας πρέπει να είναι αιτιολογημένη και να στηρίζεται στην διδαχθείσα θεωρία).



γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

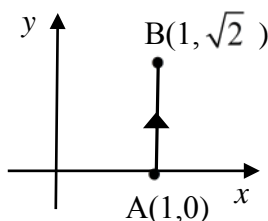
$$I_1 = \oint_C f_1(z) dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z) dz$$

όπου C ο αρνητικά προσανατολισμένος τριγωνικός βρόχος OAB του σχήματος.

(Δίνεται: $\ln(\sqrt{2} + 1) = -\ln(\sqrt{2} - 1) \approx 0,88$).

ΘΕΜΑ 2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(z) = \frac{z+1}{z-1} + z \quad \text{και} \quad f_2(z) = \frac{z}{z-1} e^{\frac{1}{z}}.$$



α) Σε ποια σημεία του μιγαδικού επιπέδου είναι σύμμορφη η απεικόνιση $w = f_1(z)$; Δώστε μέσω αυτής της απεικόνισης την εικόνα στο w -επίπεδο του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος AB .

β) Το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ στα παρακάτω χωρία είναι σειρά Taylor ή σειρά Laurent; Αιτιολογείστε την απάντησή σας και στην περίπτωση που η σειρά είναι Taylor δώστε και την ακτίνα σύγκλισής της.

1. $|z| < 1/2$ σειρά δυνάμεων του z .
2. $|z - i| < 1$ σειρά δυνάμεων του $z - i$.
3. $|z - 2| > 1$ σειρά δυνάμεων του $z - 2$.

Τέλος, γράψτε το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z στο χωρίο $|z| < 1$.

γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C f_2(z) dz$ όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z| = 2$.

ΘΕΜΑ 3. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (αιτιολογώντας κάθε υπολογιστικό σας βήμα) τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} dx \quad \beta) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 1} dx .$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Να υπολογίσετε τις μετασχηματισμένες Fourier των συναρτήσεων $f_1(x) = e^{-ax^2}$ και $f_2(x) = x^2 e^{-ax^2}$ όπου a θετική πραγματική παράμετρος.

β) Εφαρμόστε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση διάχυσης $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (2 - x^2) e^{-x^2/4}$ όταν αυτή συνοδεύεται από τις συνθήκες:

Συνοριακές συνθήκες: $u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0$.

Αρχική συνθήκη: $u(x, 0) = \delta(x)$ όπου $\delta(x)$ η «συνάρτηση δέλτα» του Dirac.