ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Ιατρικά Μαθηματικά & Βιοστατιστική

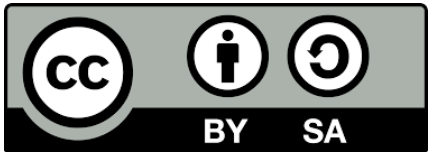
Λογαριθμιστική παλινδρόμηση

Διδάσκοντες: Ευάγγελος Ευαγγέλου, Κωνσταντίνος Τσιλίδης, Ιωάννης Δημολιάτης, Ευαγγελία Ντζάνη, Γεωργία Σαλαντή

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Λογαριθμιστική παλινδρόμηση

Γεωργία Σαλαντή

Διχότομα δεδομένα (ναι/όχι)

- Borchgrevink 1966

Εγκεφαλικό	Ναι	Όχι	Σύνολο
Omega 3	*10*	*90*	*100*
Τίποτα	*14*	*86*	*100*
	24	*186*	*200*

Κίνδυνος

- 20 φοιτητές πίνουν ρούμι πριν τις εξετάσεις, 5 κόβονται
- Κίνδυνος (risk)

  = 5 κόβονται/20 όλοι

  = 5/20 = ¼ = 0.25 = 25%

$$\text{Κίνδυνος} = \frac{\#\ \text{γεγονότων}}{\#\ \text{παρατηρήσεων}}$$

- Η πιθανότητα να κοπείς είναι 25% αν πιεις ρούμι την προηγούμενη νύχτα

Αναλογία

- 20 φοιτητές πίνουν ρούμι πριν τις εξετάσεις, 5 κόβονται
- Αναλογία (odds)

  = 5 κόβονται/15 περνάνε

  = 5/15 = 1/3 = 0.33

$$\text{Αναλογία} = \frac{\#\ \text{γεγονότων}}{\#\ \text{παρατηρήσεων} - \#\ \text{γεγονότων}}$$

  - Η πιθανότητα να κοπείς όταν πίνεις ρούμι είναι ένα τρίτο της πιθανότητας να περάσεις
  - Ένας θα κοπεί για κάθε τρεις που θα περνάνε
  - Οι πιθανότητες είναι τρία προς ένα κατά

Λόγος κινδύνων και λόγος αναλογιών

$$ΛΚ = \frac{\#\ \text{Κίνδυνος Ομάδα 1}}{\#\ \text{Κίνδυνος Ομάδα 2}}$$

Risk Ratio (RR)

$$ΛΑ = \frac{\#\ \text{Αναλογία Ομάδα 1}}{\#\ \text{Αναλογία Ομάδα 2}}$$

Odds Ratio (OR)

	Γεγονός	Όχι γεγονός	Συνολο
Νέα θεραπεία	*a*	*b*	*a+b*
Παλιά θεραπεία	*c*	*d*	*c+d*
	a+c	*b+d*	*n*

$$ΛΚ = \frac{a\,(c+d)}{c\,(a+b)}$$

$$ΛΑ = \frac{a\,d}{c\,b}$$

Ερμηνεία λόγων

- OR = 1 σημαίνει ότι η έκθεση δεν σχετίζεται με τη νόσο
- Ο κίνδυνος είναι ο ίδιος στις δύο ομάδες
- OR=2 : Η αναλογία στην ομάδα Α είναι διπλάσια σε σχέση με την ομάδα Β

Λίγο ακόμα για λόγους

- π_1 και π_2 οι πιθανότητες στις ομάδες 1 και 2

$$OR = \frac{\frac{\pi_1}{1-\pi_1}}{\frac{\pi_2}{1-\pi_2}}$$

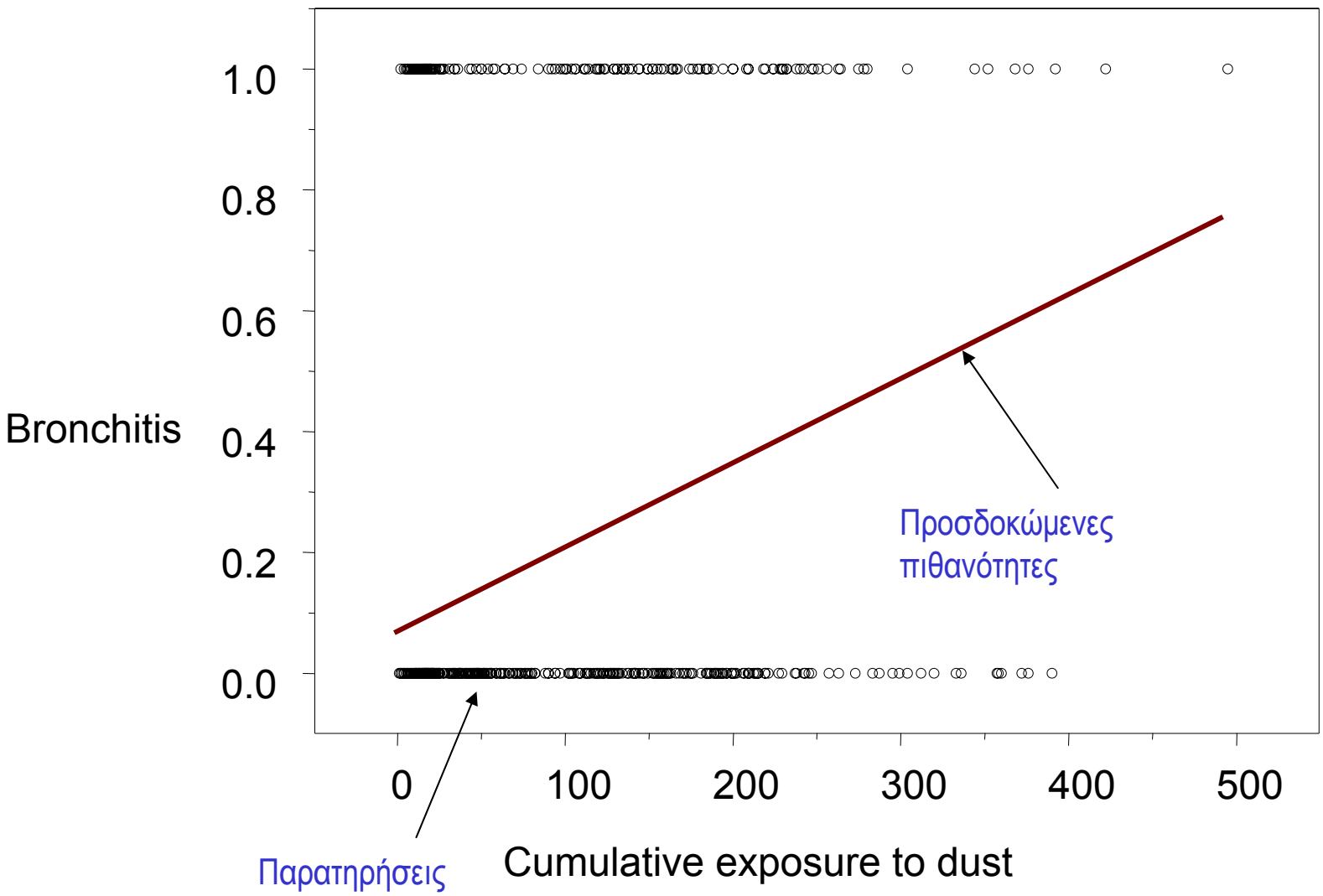
$$\log(OR) = \log\left(\frac{\pi_1}{1-\pi_1}\right) - \log\left(\frac{\pi_2}{1-\pi_2}\right)$$

Συμβολισμοί

- y το διχότομο αποτέλεσμα (ή δεσμευμένη μεταβλητή) που μας ενδιαφέρει
  - Π.χ. χρόνια βρογχίτιδα 0/1 = ναι/όχι
- x η ανεξάρτητη μεταβλητή (συνεχής η διχότομη)
  - Π.χ. ηλικία, φύλο

Παρατηρήσεις

- Για κάθε άτομο παρατηρούμε 0 ή 1
- $y_1, y_2, \ldots, y_n$
  0, 1, …, 1
- Από τους 100 εργαζόμενους στην μεταλλουργία, οι 20 παρουσίασαν χρόνια βρογχίτιδα
- Πιθανότητα βρογχίτιδας: $P(Y=1) = \pi = 20\%$
- Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα για κάθε άτομο: $P(Y_i=1) = \pi_i$
- Λογαριθμιστική παλινδρόμηση: το π_i σαν συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x (π.χ. αθροιστική έκθεση στη σκόνη)

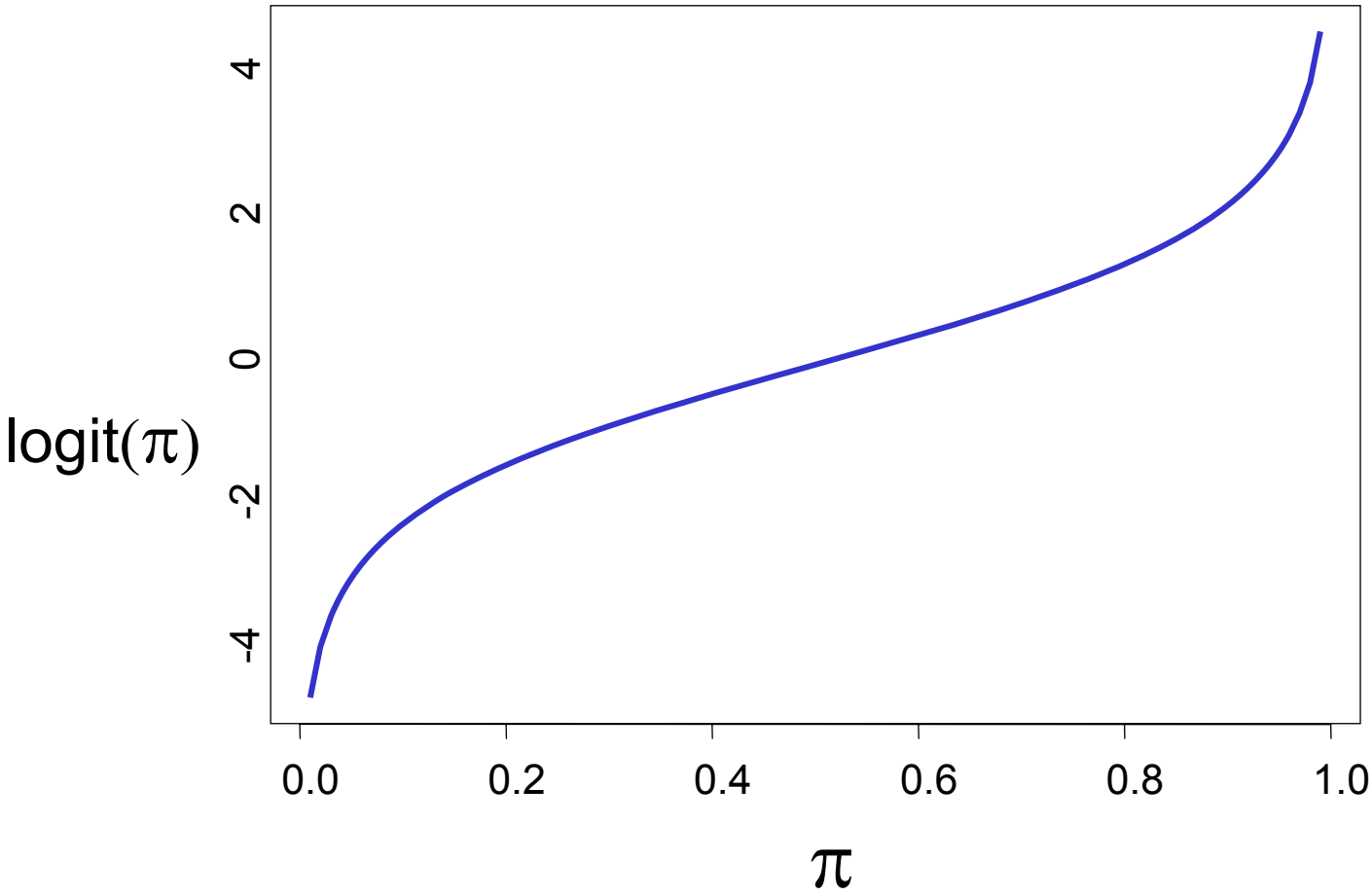

Bronchitis
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
100
200
300
400
500
Cumulative exposure to dust
Προσδοκώμενες πιθανότητες
Παρατηρήσεις

Λογαριθμιστική Συνάρτηση- Logit

- Εξαρτημένη μετ/τή: αντί για π χρησιμοποιούμε το logit(π)

$$\text{logit}(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$$

- Γιατι;
  - Έχει καλύτερες ιδιότητες (χωρίς όρια, κανονική κατανομή)
  - Δίνει logOR (logΛΑ) που είναι *μαθηματικώς* καλύτερο από το OR (ΛΑ)


logit(π)
4
2
0
-2
-4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
π

Λογαριθμιστική Παλινδρόμηση

α : αρχή

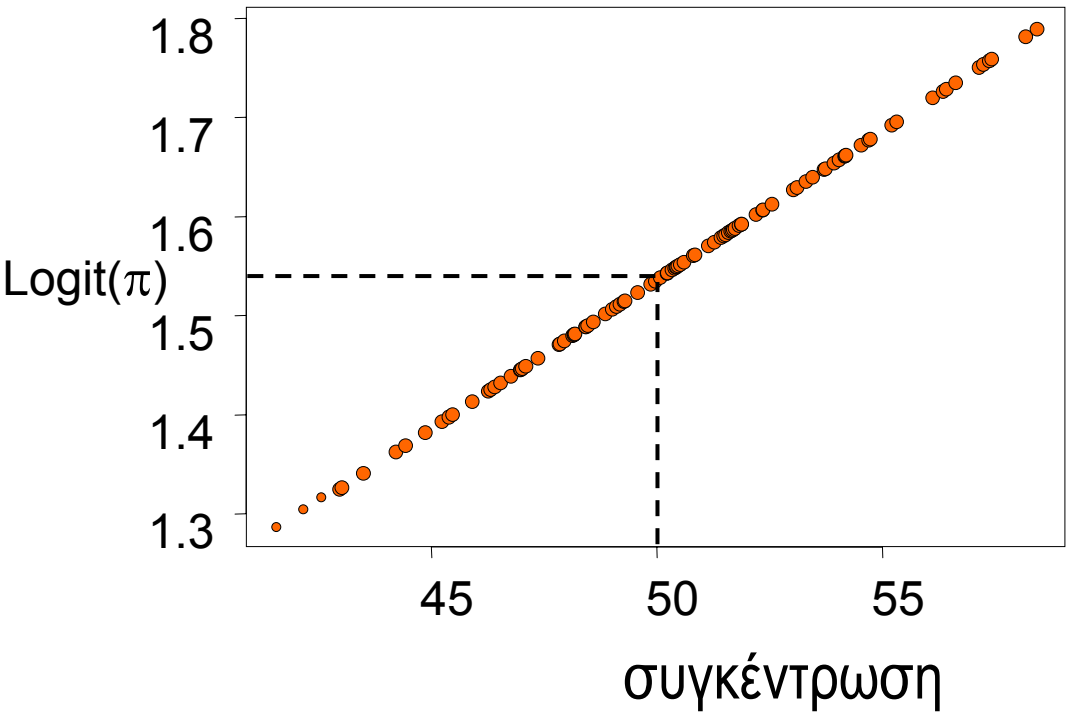
β : κλίση

$$\text{logit}(\pi_i) = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

$$\pi_i = \frac{\exp(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i)}$$

Λογαριθμιστική Παλινδρόμηση

$$\text{logit}(\pi_i) = 0.04 + 0.03 \times \text{συγκέντρωση}_i$$

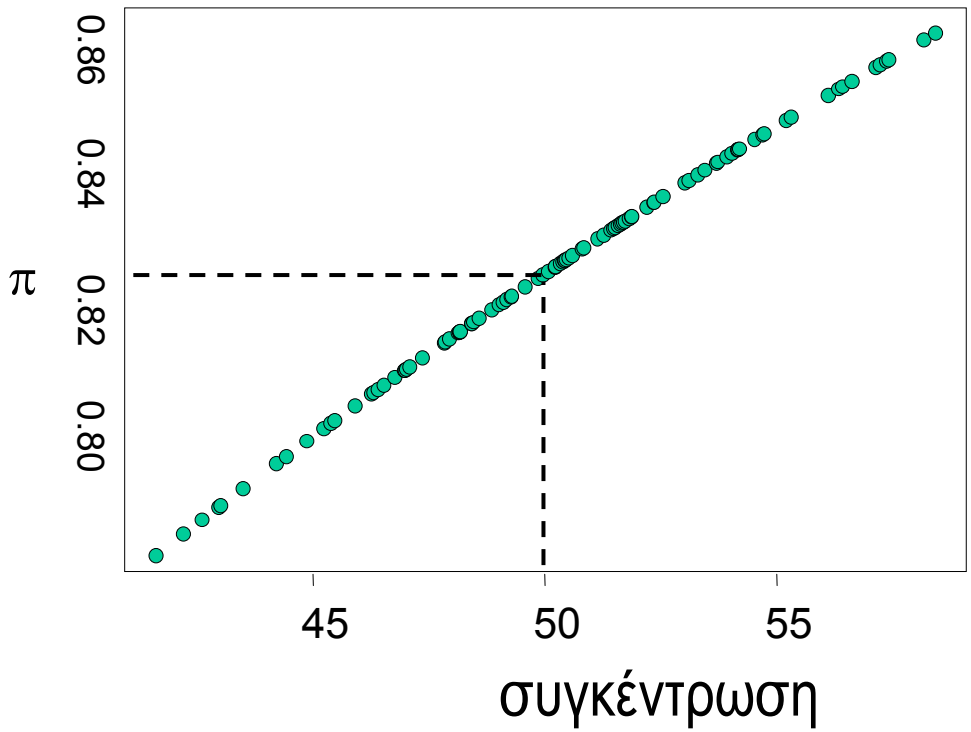


Για $\text{συγκέντρωση}_i = 50 \text{mg/cm}^3$

$y_i = \text{logit}(\pi_i) = 1.54$

Λογαριθμιστική Παλινδρόμηση

$$\text{logit}(\pi_i) = 0.04 + 0.03 \times \text{συγκέντρωση}_i$$



Για $\text{συγκέντρωση}_i = 50 \text{mg/cm3}$

$\pi_i = 0.82 = 82\%$

OR και λογαριθμιστικό μοντέλο

- π_1 και π_2 οι πιθανότητες στις ομάδες 1 και 2

$$\log(OR) = \log\left(\frac{\pi_1}{1-\pi_1}\right) - \log\left(\frac{\pi_2}{1-\pi_2}\right)$$

$$\log(OR) = \text{logit}(\pi_1) - \text{logit}(\pi_2)$$

$$OR = \exp(\text{logit}(\pi_1) - \text{logit}(\pi_2))$$

$$OR = \exp(\alpha + \beta x_1 - \alpha - \beta x_2)$$

$$OR = \exp(\beta\,(x_1 - x_2))$$

Ερμηνεία των συντελεστών

Διχότομη ανεξάρτητη μεταβλητή: το OR είναι exp(β)

$$\text{logit}(\pi_i) = 0.04 + 0.03 \times \text{καπν}_i$$

καπν_i: 0 μη καπνιστής; 1 καπνιστής

μη καπνιστής

$$\text{logit}(\pi_{MK}) = 0.04$$

καπνιστής

$$\text{logit}(\pi_K) = 0.07$$

$$\text{logOR} = \text{logit}(\pi_K) - \text{logit}(\pi_{MK}) = 0.03$$

$$\text{OR} = \exp(0.03)$$

Ερμηνεία των συντελεστών

Συνεχής ανεξάρτητη μετ/τη: το OR για μια μονάδα διαφοράς είναι exp(β)

$$\text{logit}(\pi_i) = 0.04 + 0.03 \times \text{συγκέντ}_i$$

συγκέντρωση = *50* *mg/cm³*

$\text{logit}(\pi_{50}) = 1.54$

συγκέντρωση = *51* *mg/cm³*

$\text{logit}(\pi_{51}) = 1.57$

$$\text{logOR} = \text{logit}(\pi_{51}) - \text{logit}(\pi_{50}) = 0.03$$

$$\text{OR} = \exp(0.03)$$

Εκτίμηση των α και β

- Εκτίμηση μεγιστοποιώντας την συνάρτηση πιθανοφάνειας
- Πιθανοφάνεια (likelihood): Πόσο πιθανοί είναι οι συντελεστές που εκτιμούμε όταν παρατηρούμε τα δεδομένα
- Έστω n παρατηρήσεις που είναι $y_i=0$ ή $y_i= 1$

$$L = \prod_{i=1}^{n} \pi_i^{y_i}(1-\pi_i)^{1-y_i}$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} (1+\exp(-\alpha-\beta x_i))^{-y_i}\left[1-(1+\exp(-\alpha-\beta x_i))^{-1}\right]^{1-y_i}$$

Μεγιστοποιούμε την L χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton-Raphson και εκτιμούμε α και β

Πιθανοφάνεια, Deviance και προσαρμογή του μοντέλου

- Πιθανοφάνεια: όσο πιο μεγάλη τόσο καλύτερο το μοντέλο
- Deviance D= –2 log(Likelihood)
  - Όσο μικρότερη, τόσο καλύτερο το μοντέλο
- Καλή προσαρμογή = μεγάλη πιθανοφάνεια = μικρή Deviance
- Όσο πιο πολλές μεταβλητές έχει το μοντέλο, τόσο καλύτερη η προσαρμογή του, αλλά γίνεται πιο περίπλοκο

Λογαριθμιστική Παλινδρόμηση με πολλές μεταβλητές

$$\text{logit}(\pi_i) = \alpha + \beta_1 \times \text{καπν}_i + \beta_2 \times \text{συγκ}_i$$

Έλεγχοι και επιλογή μοντέλου:

- Έλεγχος για κάθε β_i; Wald test, Likelihood ratio test (LRT)
- Έλεγχος ενός μοντέλου έναντι του άλλου: LRT
- Έλεγχος για όλους τους συντελεστές σύγχρονος: LRT

Wald τεστ

Για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή ξεχωριστά

H_0: $\beta_i = 0$ ή ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή *x δεν έχει προγνωστική αξία ως προς την y*

$$\frac{\beta_i}{SE(\beta_i)} \sim X^2_{1df}$$

Επιλογή μεταβλήτών – έλεγχοι μοντέλων

- Για να αποφασίσουμε αν μια μεταβλητή X είναι σημαντική για το μοντέλο θα συγκρίνουμε δυο μοντέλα με βάση την προσαρμοστικότητά τους στα δεδομένα (χρησιμοποιώντας την deviance)
  - Το μοντέλο χωρίς την μεταβλητή X
  - Το μοντέλο με την μεταβλητή X

- Μοντέλο 1: μοντέλο με το κάπνισμα $\Rightarrow D_1$
- Μοντέλο 2: μοντέλο με το κάπνισμα και την συγκέντρωση σκόνης$\Rightarrow D_2$

- Προτιμούμε το μοντέλο που έχει τη μικρότερη Deviance

Επιλογή μεταβλητών και σύγκριση μοντέλων

- Το μοντέλο με τις πιο πολλές μεταβλητές θα έχει τη μικρότερη Deviance
  - $D_2 < D_1$
- Όμως είναι και το πιο περίπλοκο
  - Πολλές μεταβλητές
- Χρειαζόμαστε έναν κανόνα για να αποφασίσουμε εάν η μείωση στην deviance 'αξίζει' την αυξημένη περιπλοκότητα του μοντέλου

Likelihood Ratio Test (LRT) [Λόγος Πιθανοφανειών]

LRT: γενίκευση

- LRT= D(μοντέλο χωρίς τις p μεταβλητές)- D(μοντέλο με τις p μεταβλητές)

$$LRT \sim X^2 \text{ με } p \text{ βαθμούς ελευθερίας}$$

  - P-value<0.05 : Το μοντέλο με τις επιπλέον μεταβλητές είναι στατιστικά καλύτερο από το μοντέλο χωρίς τις μεταβλητές $\Rightarrow$ κρατάμε τις μεταβλητές ως σημαντικές
  - P-value>0.05 : Το μοντέλο με τις επιπλέον μεταβλητές δεν είναι στατιστικά καλύτερο από το μοντέλο χωρίς τις μεταβλητές $\Rightarrow$πετάμε τις μεταβλητές ως ασήμαντες

- Προσοχή ! Τέτοιοι 'απλοϊκοί' κανόνες δεν είναι πάντα χρήσιμοι – να κοιτάμε και την κλινική πλευρά του θέματος

Επιλογή μοντέλου: Έλεγχος για την X_3

Variables in the model	Deviance	Compare	X^2	P-value
$X_1 X_2 X_3$	D_1			
$X_1 X_2$	D_2			
X_3	D_3			
none	D_4			

$$D_1 < D_2 < D_3 < D_4$$

Επιλογή μοντέλου: Έλεγχος για την X_3

Variables in the model	Deviance	Compare	X^2	P-value
$X_1 X_2 X_3$	D_1			
$X_1 X_2$	D_2			
X_3	D_3	$D_3 - D_4$	1df	Ελέγχει για την X_3
none	D_4			

$D_1 < D_2 < D_3 < D_4$

Επιλογή μοντέλου: Έλεγχος για την X_3

Variables in the model	Deviance	Compare	X^2	P-value
$X_1 X_2 X_3$	D_1	$D_1 - D_2$	1df	Ελέγχει για την X_3
$X_1 X_2$	D_2			
X_3	D_3			
none	D_4			

Αυτός ο έλεγχος είναι 'σταθμισμένος' για τις μεταβλητές X_1 ,X_2

$D_1 < D_2 < D_3 < D_4$

Επιλογή μοντέλου:παράδειγμα

Variables in the model	Deviance	Compare	X^2	P-value
$X_1 X_2 X_3$	D_1			
$X_1 X_2$	D_2			
X_3	D_3			
none	D_4			

$D_1 < D_2 < D_3 < D_4$

Επιλογή μοντέλου:παράδειγμα

Variables in the model	Deviance	Compare	X^2	P-value
$X_1 X_2 X_3$	D_1	$D_1 - D_4$	3 df	Ελέγχει για τις X_1, X_2, X_3
$X_1 X_2$	D_2			
X_3	D_3			
none	D_4			

$D_1 < D_2 < D_3 < D_4$

Προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα

- Ψευδο R^2 = $\text{Πιθανοφάνεια}_{\text{μοντέλου}} - \text{Πιθανοφάνεια}_{0\ \text{μεταβλητες}}) / \text{Πιθανοφάνεια}_{\text{μοντέλου}}$

  Είναι το ποσοστό αύξησης της πιθανοφάνειας με το μοντέλο

- Akaike's Information Criterion

$$AIC = Deviance + 2 \times p$$

p ο αριθμός των μεταβλητών στο μοντέλο

  - Όσο μικρότερο τόσο καλύτερα
  - Διαφορά 3 βαθμών ή παραπάνω είναι σημαντική

Hosmer and Lemenshow's τεστ για έλεγχο προσαρμογής

- Συγκρίνουμε παρατηρούμενα και προσδοκώμενα γεγονότα (σύμφωνα με τις προβλέψεις του μοντέλου)
- Αν το μοντέλο είναι καλό, παρατηρούμενα και προσδοκώμενα γεγονότα πρέπει να συμφωνούν
- Μέθοδος
  - Χωρίζουμε τα δεδομένα σε ομάδες, π.χ. 10 ομάδες
  - Εκτιμούμε τον αριθμό γεγονότων από το μοντέλο
  - Για H_0 : *'Το μοντέλο ταιριάζει στα δεδομένα'* υπολογίζουμε ένα X^2 τέστ
  - Εάν p-value > 0.05 *Το μοντέλο δεν είναι αταίριαστο με τα δεδομένα*

Table 2: Regression of LBWT on SES: Controlling for Sociodemographics, Health Behaviors, Health-Related Variables, and Mother's BWT

Variable	*Model 1*	*Model 2*	*Model 3*	*Model 4*
Income (thousands)	−.0445**			−.0437**
Mom's Education (years)	−.0259	−.0529**	−.0486**	−.0244
Dad's Education (years)	−.0166	−.0382**	−.0293†	−.0141
Occupational Grade			−.0067†	−.0014
Income Inequality (Gini)		3.0692		2.0935
Constant	−1.6536	−2.7799	−1.4554	−2.6686
Wald Chi-Square (*df*)	152.83 (8)	72.23 (8)	73.49 (6)	156.77 (14)
N-size	12,814	12,814	12,814	12,814

Note: †$p<.10$, *$p<.05$, **$p<.01$; Normal BWT is the reference category—high BWT results are modeled simultaneously to improve efficiency of the estimates, but results are not presented.

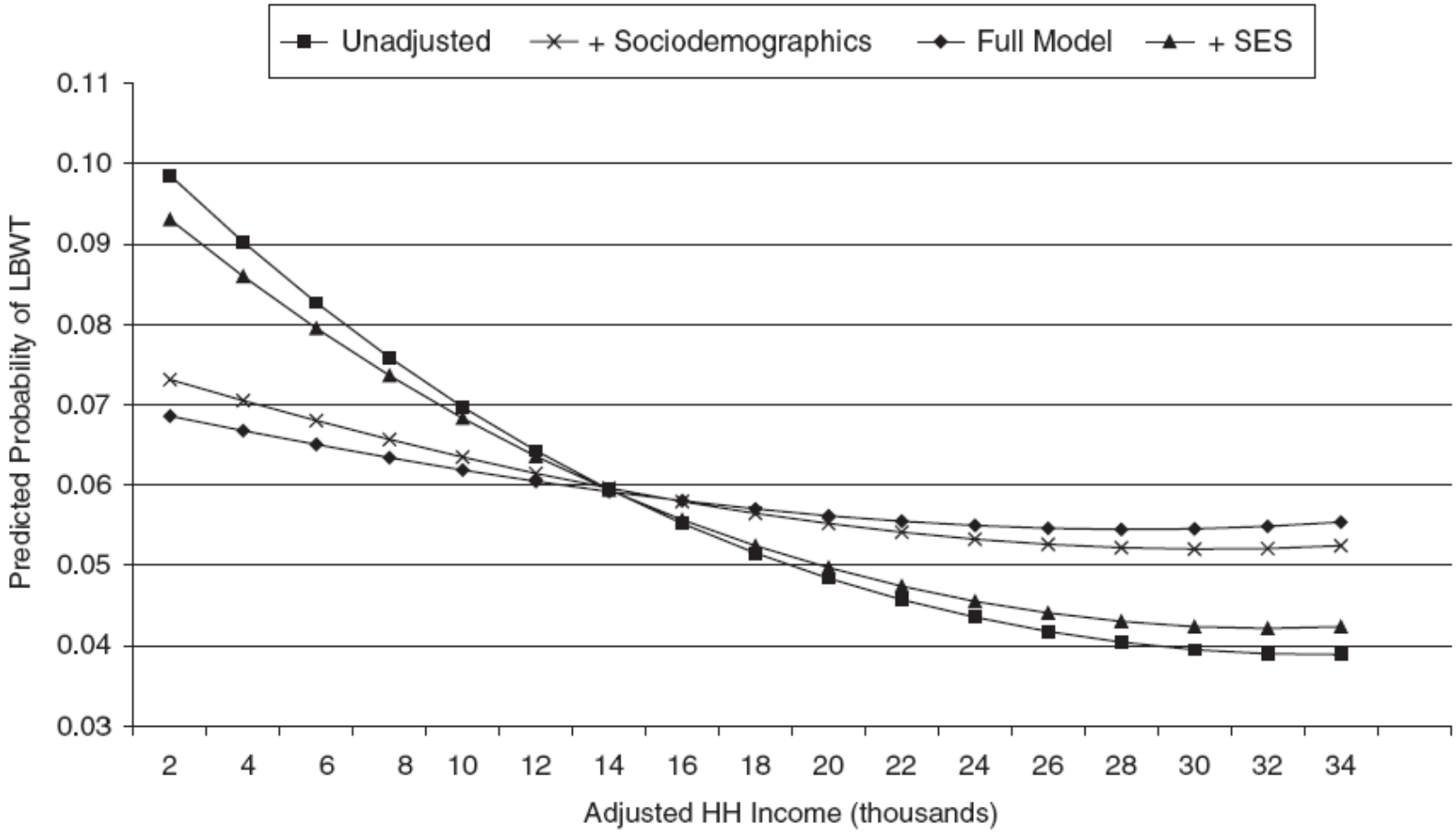
Logit(π)= -1.65 - 0.045Income - 0.03YearsM -0.02YearsF +…….

OR =exp(-0.045) = 0.96 για διαφορά 1000$

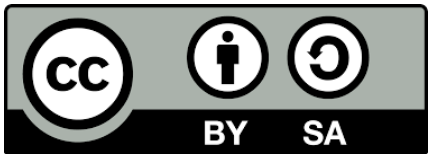
Πρόγνωση

- Logit(π)= -1.65 - 0.045 Income - 0.03YearsM - 0.02YearsF +…….
- Για Income 2,000 με 5 και 1 έτη σπουδών στην μητέρα και πατέρα αντίστοιχα
  - Logit(π)= -1.91
  - $\text{logit}^{-1}(\pi)= \exp(-1.91)/[1+\exp(-1.91)]$ →π=15%
- Για Income 10,000 με 5 και 1 έτη σπουδών στην μητέρα και πατέρα αντίστοιχα
- Logit(π)= - 2,3
  - π=10%

Figure 1: Predicted Probabilities for LBWT by Income: Separate Unadjusted and Adjusted Models



Τέλος Ενότητας



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

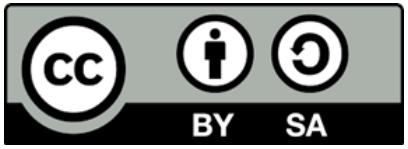
Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1350.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή, Διεθνής Έκδοση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη.



- [1] https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.