

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

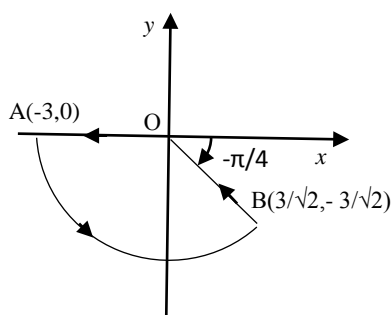
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z) = x^2 - y^2 - i2xy$ και

$f_2(z) = \frac{\text{Log}(2z - i)}{(z^2 + \pi^2) \sinh(z - i)}$ όπου $z = x + iy$ και $\text{Log}z$ η κύρια τιμή της συνάρτησης $\log z$.

α) Πότε μια συνάρτηση $f(z)$ λέγεται αναλυτική στο σημείο z_0 ; Γράψτε την εκφώνηση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

β) Προσδιορίστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις $f_1(z)$, $f_2(z)$ έχουν παράγωγο και τα σημεία που είναι αναλυτικές. (Η απάντησή σας πρέπει να είναι αιτιολογημένη και να στηρίζεται στην διδαχθείσα θεωρία).



γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \oint_C f_1(z) dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z) dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος βρόχος $OABO$ του σχήματος που αποτελείται από το κυκλικό τόξο \widehat{AB} με κέντρο την αρχή O και ακτίνα 3 και τους ευθύγραμμους δρόμους OA και BO .

ΘΕΜΑ 2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(z) = \frac{2}{z} + z \quad \text{και} \quad f_2(z) = \frac{z+1}{(z-2)(z-3)}.$$

α) Σε ποια σημεία του μιγαδικού επιπέδου η απεικόνιση $w = f_1(z)$ δεν είναι σύμμορφη; Ποια είναι η γωνία στροφής και ο συντελεστής κλίμακας στο σημείο $z_0 = 1 + i$; Αναπτύξτε την $f_1(z)$ σε σειρά Taylor με

κέντρο το σημείο $z_0 = 1$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης αυτής της σειράς;

β) Εξηγήστε γιατί το ανάπτυγμα της $f_2(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z (δηλ. με κέντρο το $z_0 = 0$) στο χωρίο $2 < |z| < 3$ είναι σειρά Laurent. Υπολογίστε τη σειρά Laurent της $f_2(z)$ στο χωρίο $2 < |z| < 3$.

γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C (z-1)^2 e^{1/z} dz$ όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z|=1$.

ΘΕΜΑ 3. Χρησιμοποιείτε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (αιτιολογώντας κάθε υπολογιστικό σας βήμα) τα ολοκληρώματα

$$\alpha) I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+i)(x-i)^3} dx, \quad \beta) I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta + 2}.$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Υπολογίστε τη μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $f(x) = [H(x) - H(x - \pi)] \sin x$ όπου $H(x)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος. Στην συνέχεια βασιζόμενοι στον τύπο Parseval-Plancherel υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 + \cos(k\pi)}{(k^2 - 1)^2} dk.$$

β) Εφαρμόστε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + 2u, \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } -\infty < x < +\infty,$$

η οποία συνοδεύεται από τις συνθήκες: $u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0$ (συνοριακές συνθήκες), και $u(x, 0) = f(x)$ όπου $f(x)$ η συνάρτηση του ερωτήματος (α) (αρχική συνθήκη).

