

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

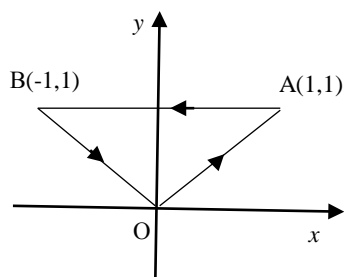
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f_1(z) = \sin(\pi x) + i \sin(\pi y) \quad \text{και} \quad f_2(z) = \frac{1}{1 + \sin^2 z} \quad \text{όπου } z = x + iy.$$

α) Γράψτε ικανές συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(z)$ να έχει στο σημείο z_0 παράγωγο. Γράψτε την εκφώνηση του θεωρήματος Cauchy-Goursat.

β) Προσδιορίστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις $f_1(z)$, $f_2(z)$ έχουν παράγωγο και τα σημεία που είναι αναλυτικές. (Η απάντησή σας πρέπει να είναι αιτιολογημένη και να στηρίζεται στην διδαχθείσα θεωρία).



γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \oint_C f_1(z) dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z) dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος τριγωνικός βρόχος $OABO$ του σχήματος.

$$(\text{Δίνεται: } \ln(3 + 2\sqrt{2}) = -\ln(3 - 2\sqrt{2}) = 2\ln(\sqrt{2} + 1) = -2\ln(\sqrt{2} - 1) \approx 1,76).$$

ΘΕΜΑ 2.

α) Γράψτε την εκφώνηση του θεωρήματος Taylor. Ποια από τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης

$$g(z) = \frac{e^{1/z}}{(z-2)\sin(z-2)}$$

είναι πόλοι και ποια η τάξη τους;

β) Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)(z^2+1)}$$

Εξηγήστε γιατί το ανάπτυγμα της σε σειρά δυνάμεων του z στο χωρίο $|z| < 1$ είναι ένα ανάπτυγμα MacLaurin. Στη συνέχεια υπολογίστε αυτό το ανάπτυγμα.

γ) Εξηγήστε γιατί το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του $z-1$ της συνάρτησης $f(z)$ (η συνάρτηση του ερωτήματος β) σε ένα χωρίο της μορφής $0 < |z-1| < R$ (με κατάλληλα επιλεγμένη τιμή του R) είναι ένα ανάπτυγμα Laurent. Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει το R ; Υπολογίστε αυτό το ανάπτυγμα Laurent.

ΘΕΜΑ 3. Χρησιμοποιήστε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (με επεξήγηση της μεθόδου υπολογισμού σε κάθε περίπτωση και αιτιολόγηση των υπολογιστικών σας βημάτων) τα ολοκληρώματα

$$\alpha) I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx, \quad \beta) I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos\theta + \sin\theta} d\theta.$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Υπολογίστε τη μετασχηματισμένη Fourier $G(k)$ της συνάρτησης $g(x) = e^{-|x|}$. Από την τιμή που θα βρείτε για την $G(k)$ χρησιμοποιώντας την αρχή της συμμετρίας να συνάγετε την τιμή $F(k)$ της μετασχηματισμένης Fourier της συνάρτησης

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Τέλος, με την βοήθεια του τύπου Parseval-Plancherel να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx.$$

β) Εφαρμόστε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε (με επεξηγήσεις και αιτιολόγηση των υπολογιστικών σας βημάτων) την εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

όταν αυτή συνοδεύεται από τις συνθήκες: $u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0$ (συνοριακές

συνθήκες) και $u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (αρχική συνθήκη).