ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

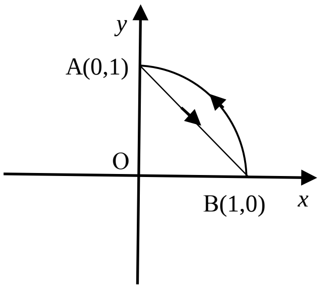
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ 1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z) = z\bar{z} + z$ και

$f_2(z) = \dfrac{1}{\cos(\pi z)\left[\sin(\pi z) - 3\right]} + \mathrm{Log}z$ όπου $z = x + iy$ και $\mathrm{Log}z$ ο κύριος κλάδος της συνάρτησης λογάριθμος.

α) Γράψτε ικανές συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(z)$ να έχει παράγωγο στο σημείο z_0. Πότε μια συνάρτηση $f(z)$ λέγεται αναλυτική στο σημείο z_0; Γράψτε την εκφώνηση του θεωρήματος Cauchy-Goursat.

β) Προσδιορίστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις $f_1(z)$, $f_2(z)$ έχουν παράγωγο και τα σημεία που είναι αναλυτικές. (Η απάντησή σας πρέπει να είναι αιτιολογημένη και να στηρίζεται στην διδαχθείσα θεωρία).



γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

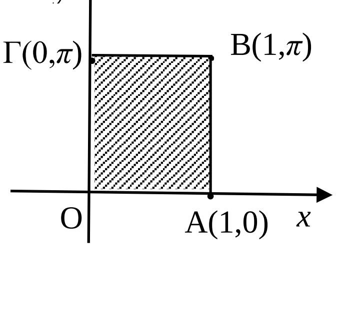
$$I_1 = \oint_C f_1(z)dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z)dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος βρόχος ΑΒΑ του σχήματος που αποτελείται από την χορδή ΑΒ και το κυκλικό τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$ του οποίου το κέντρο είναι η αρχή των αξόνων και η ακτίνα ίση με 1.

(Δίνεται ότι $\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) = -\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right) = -2\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \simeq 1,763$).

ΘΕΜΑ 2.

α) Πότε μια απεικόνιση $w = f(z)$ λέγεται σύμμορφη στο σημείο z_0; Πως ορίζεται η γωνία στροφής και ο συντελεστής κλίμακας στο z_0; Θεωρείστε τώρα την απεικόνιση $w = e^z$. Βρείτε τη γωνία στροφής και το συντελεστή κλίμακας στο σημείο $z_0 = (1+i)\pi$. Στη συνέχεια βρείτε μέσω αυτής της απεικόνισης την εικόνα στο w-επίπεδο του χωρίου ΟΑΒΓ σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου.



β) Έστω η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$. Εξηγείστε γιατί το ανάπτυγμά της σε σειρά δυνάμεων του z στο χωρίο $1<|z|<2$ είναι μια σειρά Laurent. Υπολογίστε αυτό το ανάπτυγμα.

γ) Υπολογίστε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο $z_0 = 0$ της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} e^{1/z^2} \ .$$

ΘΕΜΑ 3. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (με επεξήγηση της μεθόδου υπολογισμού σε κάθε περίπτωση και αιτιολόγηση των υπολογιστικών σας βημάτων) τα ολοκληρώματα

$$\alpha) \quad \mathrm{I}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+5\right)} dx \qquad \beta) \quad \mathrm{I}_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta - 3} \ .$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Υπολογίστε τη μετασχηματισμένη Fourier $F(k)$ της συνάρτησης $f(x) = H(x)e^{-x}$ όπου $H(x)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος. Μετά, εφαρμόστε τον τύπο Parseval-Plancherel για τις συναρτήσεις $f(x)$ και $F(k)$ ώστε να καταλήξετε στην τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \ .$$

β) Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $\dfrac{d^2I}{dt^2} + 2\dfrac{dI}{dt} + I = \dfrac{dV}{dt}$ η οποία περιγράφει την ένταση $I(t)$ του ρεύματος που διαρρέει ένα κύκλωμα RLC με αυτεπαγωγή 1 Henry, ωμική αντίσταση 2 Ohms, και χωρητικότητα 1 Farad όταν στα άκρα του εφαρμόζεται η τάση $V(t) = H(t)e^{-t}$. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier για να υπολογίσετε την ένταση του ρεύματος $I(t)$ στη μόνιμη κατάσταση.